Universiteit van Amsterdam
Bachelorproject theoretische natuurkunde

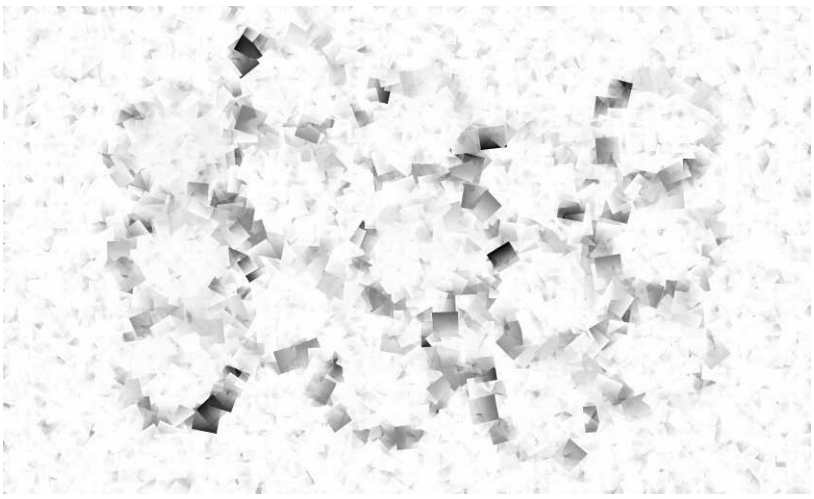
De Percolatie van Rigiditeit en de Isostatische Hypothese

Uitvoerend Student: Wout Neutkens
Projectbegleider: Prof. dr. B. Nienhuis
Onderzoeksperiode: 5/5/2009 tot 11/8/2009

Voorwoord

De zomer waarin ik aan dit bachelorproject heb gewerkt, ben ik ook een week gaan zeilen met vrienden. We liepen 's avonds langs het water op zoek naar vertier. Er werd aan de dijk gewerkt. Grote blokken beton stonden in groepjes klaar om de dijk te versterken in zijn flanken. De blokken hadden een speciale vorm, maar leken volkomen willekeurig te zijn verspreid. Waarom zouden ze zo'n afgevlakte, bijna zeshoekige blokken gebruiken? En waarom dan toch zo ordeloos stapelen? Richter, De Kapitein, vond de eerste clue: 'Jongens' zei hij, 'er zit wel degelijk structuur in deze blokken!' We liepen op hem af om te zien wat hij bedoelde. De blokken vormde groepjes van 5 bij 6 (dezelfde groepjes als we al eerder zagen) en deze groepjes herhaalde zich over de hele lengte van de dijk...

Nadat we er een tijdje stonden te kijken begon het zachtjes te regenen. Mijn zeilgenoten maakten aanstalten om te gaan. Een beetje in gedachten verzonken zei ik nog: 'het coördinatiegetal is wel hetzelfde', maar er was niemand die het hoorde.



Figuur 1: Bovenaanzicht van de blokken bij Kats

Inhoudsopgave

Samenvatting

In allerlei gebieden van onderzoek aan granulaire systemen wordt de isostatische hypothese gebruikt om een voorspelling te doen van het gemiddeld aantal contacten per granule (het gemiddeld *coördinatiegetal*). De granulaire pakking wordt hierin verondersteld minimaal stevig te zijn. Het onderzoek van dit project gaat over het verband tussen deze hypothese en de percolatie van een rigide netwerk op een oneindig groot rooster. De buurpunten op het rooster zijn hierbij naar willekeur verbonden. Concreter houdt de vraag in hoeveel oververbonden gebieden zich er op het rigide netwerk bevinden in het geval dat er een minimaal aantal roosterpunten verbonden zijn. Wat er wordt bedoeld met 'minimaal stevig', 'de percolatie van een rigide netwerk' en de 'oververbonden gebieden' zal in de scriptie worden uitgelegd.
Hoofdstuk één behandeld de definitie van rigiditeit met behulp van grafen en inbeddingen in de Euclidische ruimte. Ook komt in dit hoofdstuk percolatie op een oneindig groot rooster aan bod. Er wordt besloten met een paragraaf over recent onderzoek aan de percolatie van rigiditeit.
Hoofdstuk twee geeft een beschrijving van de isostatische hypothese en besluit met de onderzoeksvraag.
De hoofdstukken drie en vier gaan in op de numerieke simulatie's die pogen deze vraag te beantwoorden. Er zal worden uitgelegd hoe het algoritme 'The Pebble Game' werkt en hoe we het gemiddeld coördinatiegetal uitrekenen.
De scriptie zal worden beïndigd met de numerieke resultaten en de conclusie.

1 Het Percoleren van Rigide Netwerken

Informeel uitgedrukt betekent een rigide netwerk een figuur bestaande uit onderling verbonden lijnstukken. De lijnstukken kunnen niet vervormd worden, maar ze kunnen wel onderling scharnieren. Zo is bijvoorbeeld in twee dimensies een driehoek rigide, maar een vierkant niet, want deze kan scharnieren en een ruitvorm aannemen. Percoleren is te zien als het volgen van veel (kleine) paadjes om door een medium heen te komen. Neem bijvoorbeeld de percolator, een ouderwets koffiezetapparaat, waarin het water door de koffie sijpelt.
Rigiditeitspercolatie is het percoleren van rigide vormen door een medium. Dit medium kan abstract zijn. Om een voorbeeld te geven: stel je een berg zand voor. In het zand zitten de meeste korrels tegen elkaar aangedrukt. Zonder rekening te houden met de vorm, massa, wrijving, etc. van de korrels kunnen we een rooster opstellen. Iedere zandkorrel is een roosterpunt en als twee korrels elkaar raken verbinden we de desbetreffende roosterpunten doormiddel van een lijn. Zo ontstaan er netwerken van verbonden punten op het rooster. Het netwerk behorend bij de zandkorrels die de berg overeind houden noemen we een rigide netwerk. Het rooster is wat ik het 'abstracte medium' noem, te vergelijken met de koffie in de percolator. Het rigide netwerk is hetgeen wat percoleert door dit medium en is te vergelijken met het water.
In de volgende paragrafen zal het percoleren van een rigide netwerk concreter gemaakt worden met behulp van grafen.

1.1 Rigide Netwerken

We willen precies maken wat een rigide netwerk is. Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn. V is een verzameling punten (**V**ertices) en E is een verzameling verbindingen tussen deze punten (**E**dges). Punten zijn hier niet met zichzelf verbonden. Aan V kan een realisatie h naar $\mathbb{R}^d$ worden toegekend, met $h(p_i) = \mathbf{p_i}$ ($p_i \in V$). Dan is een *netwerk* G_h een graaf G samen met een realisatie h van G. We proberen hier een criterium te formuleren aan de hand waarvan we kunnen zeggen dat G_h rigide is.

Eerst definiëren we functies die de punten uit V verplaatsen, zodat geen van de lijnstukken $\{i, j\} \in E$ buigen of strekken. Neem hiertoe de 'infinitesimale verplaastingsafbeeldingen' waarbij aan iedere $p_i \in V$ een infinitesimale vector $\mathbf{v_i} \in \mathbb{R}^d$ toegevoegd wordt. Noem zo'n afbeelding een *flex* als hij voor iedere $i, j \in E$ voldoet aan $< \mathbf{p_i} - \mathbf{p_j}, \mathbf{v_i} - \mathbf{v_j} > = 0$ met $<, >$ het reguliere inproduct op $\mathbb{R}^d$. Deze voorwaarde bewaart afstanden tussen de verbonden punten.

Verder noemen we een verplaatsingsafbeelding *triviaal* of een *starre beweging* als de afbeelding $f : h(V) \to \mathbb{R}^d, \mathbf{p_i} \to \mathbf{p_i} + \mathbf{v_i}$ een isometrie is, waarbij h een willekeurige realisatie. Een isometrie bewaart de afstanden tussen alle punten uit het domein V. Indien we alleen de rigiditeit van een deelgebied uit de graaf willen beschouwen definiëren we $G' = (V', E')$ met $G' \in G$ een subgraaf. We kijken dan of de beperking van de afbeelding f tot V' een isometrie is.

In de praktijk hebben we het over een structuur van staven die onderling kunnen scharnieren. Als de geometrie echter tegengaat dat de staven onderling kunnen bewegen blijven alleen de triviale bewegingen van het lichaam als geheel over. Het rigiditeitscriterium kan nu als volgt geformuleerd worden: een netwerk is rigide als iedere flex triviaal is. Ofwel, de realisatie van de (sub)graaf kent alleen starre bewegingen.

We hebben het hiervoor gehad over een specifieke realisatie van een graaf, maar we willen de graaf op zich rigide kunnen noemen. Bijvoorbeeld als ieder netwerk behorend bij de graaf rigide is. Helaas is dit niet zomaar mogelijk. Nemen we echter alleen de realisaties die linear onafhankelijk zijn onder $\mathbb{Q}^d$, dan kunnen we spreken over 'Generic Rigidity'. Er is een theorema (zie [1] theorem 60.1.3) dat stelt dat als de graaf één rigide realisatie heeft dat dan alle realisaties rigide zijn. Is dit het geval dan is de graaf generically rigid en ik noem het in deze scriptie gewoon 'een rigide graaf'. Om een voorbeeld te noemen: een vierkant in het platte vlak heeft geen coördinaten die algebraïsch onafhankelijk zijn. Om het vierkant te realiseren zal één van de lijnstukken langer of korter moeten zijn.

1.2 contactpercolatie

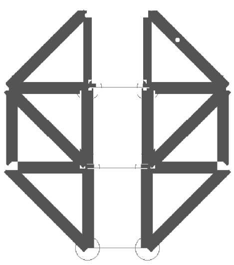
Meer helderheid over percolatie in het algemeen kan verkregen worden door eerst naar contactpercolatie te kijken. Hierbij kijkt men alleen naar de onderlinge verbindingen tussen punten op een graaf. Eerst de fenomenologie.
Als men zegt dat er iets percoleert op een rooster, bijvoorbeeld van links naar rechts, dan betekent dit dat er een pad is over onderling verbonden punten van links naar rechts. We noemen de verzameling verbonden punten een cluster. De percolatie van zo'n cluster wordt onderzocht in een statistische context: tussen paren van naburige punten is er een kans dat een verbinding aanwezig is. Is deze kans klein, dan is de kans op percolatie ook klein. Nu kan je je concreet de volgende vraag stellen: "Gegeven een oneindig groot rooster en een kans p dat buren verbonden zijn, wat is de kans $\psi(p)$ dat er een oneindig groot cluster van verbonden punten aanwezig is op het rooster?"
Welnu, het blijkt dat deze kansen niet lineair gecorreleerd zijn. Het moge duidelijk zijn dat $p = 0 \Rightarrow \psi(p) = 0$ en $p = 1 \Rightarrow \psi(p) = 1$ opgaan. Tussen deze twee waardes bevind zich echter iets bijzonders; een fase-overgang zoals we die kennen uit de Statistische Fysica. Er is sprake van een drempelwaarde p_c zodat als $p < p_c$ dan geldt $\psi = 0$ en als $p > p_c$ dan $\psi = 1$. Dit wordt voor een vierkantvormig rooster bewezen in o.a. ref. [3]. Boven de drempelwaarde neemt de kans dat een willekeurige verbinding onderdeel is van een oneindig groot cluster toe met een zekere macht van $(p - p_c)$. Deze macht, die een verband geeft tussen twee grootheden, noemen we een kritieke exponent. In dit geval zijn de grootheden de fractie van de omvang van het oneindige cluster tenopzichte van het hele rooster en het gemiddelde coördinatiegetal van het rooster.
De kritieke exponent is welbepaald is nabij de fase-overgang. Dit is typisch voor fractalen en tevens analoog aan de gas-vloeistof overgang waarvoor geldt:

$$\rho_L - \rho_G \propto (T_c - T)^\beta \qquad \text{als } T \uparrow T_c$$

Waarbij ρ_L, ρ_G de dichtheid van de vloeistof en die van het gas zijn en T_c de kritieke temperatuur, waar het verschil tussen vloeistof en gas verdwijnt. Water, helium en vele andere vloeistoffen hebben dezelfde kritieke exponent β.
In het onderzoek naar percolatie wordt dus onder andere gebruik gemaakt van de drempelwaarde en de kritieke exponent.

1.3 Onderzoek aan rigiditeitspercolatie

Voor $p > p_c$ percoleert er een cluster door het rooster tot in het oneindige. Wat zijn nu de eigenschappen van het 'minimaal percolerende' (dus voor $p \downarrow p_c$) cluster?
Dit is waar een belangrijk begrip in de statistische fysica naar voren komt: *Universaliteit*. Het is gebleken dat verschillende systemen (fractalen, files, ising magneten, het vacuüm) dezelfde eigenschappen vertonen. Deze systemen behoren dan tot een bepaalde universaliteitsklasse. Een universaliteitsklasse kan heel verschillende systemen onder dezelfde noemer brengen. Bijvoorbeeld omdat ze dezelfde kritieke exponenten vertonen nabij een fase-overgang. Er wordt aangenomen dat rigiditeitspercolatie ook tot een universaliteitsklasse behoort, maar er zijn nog geen andere verschijnselen in dezelfde klasse gevonden.
Renormalisation Group Theory houdt zich bezig met het vinden van bepaalde schalingswetten, zoals kritieke exponenten. Aan de hand hiervan kunnen microscopisch zeer uiteenlopende systemen in één en dezelfde universaliteitsklasse geplaatst worden. Van rigiditeitspercolatie is nog niet bekend op welke theoretisch manier de schalingswetten kunnen worden gevonden. Wel is numeriek benaderd wat de drempelwaarde p_c en de kritische exponent β zijn.



Figuur 2: Een Staafconstructie

2 De Isostatische Hypothese

Uit paragraaf 1.1 weten we dat er voor een netwerk behorend bij een graaf een infinitesimaal flex bestaat, die moet voldoen aan een set vergelijkingen. De onafhankelijke set bewegingsvrijheden worden via deze vergelijkingen aan elkaar gerelateerd, waarbij de afstanden tussen iedere twee verbonden punten behouden blijft.
Stel je nu een verzameling opeengepakte bollen voor, waarvan de posities gegeven zijn. De bollen oefenen krachten op elkaar uit en wanneer men een kracht verandert, zullen andere krachten dit moeten opheffen om de geometrie te bewaren. Nu waren volgens de eerste (topologische) definitie de onbekenden de *posities* en de bekenden de *lengtes* van de lijnstukken. In de 'geometrische beschrijving' zijn de onbekenden de *krachten* en de bekenden de posities. Ook hier zijn er meerdere realisaties mogelijk; er zijn namelijk verschillende krachtennetwerken voor een gegeven geometrie.
Vanuit de geometrische beschrijving wordt de isostatische hypothese geformuleerd. Als het aantal verbindingen in een netwerk gelijk is aan het aantal vrijheidsgraden, noemen we het isostatisch. Is het aantal verbindingen kleiner, dan noemen we het hypostatisch. Is het groter, dan hyperstatisch. In twee dimensies is het coördinatiegetal van een isostatisch netwerk vier. Als er namelijk n punten zijn, dan zijn er $2n$ vrijheidsgraden en dan ook $2n$ lijnstukken (verbindingen). Ieder lijnstuk verbindt twee punten. Er zijn dus $4n$ 'aanknopingspunten' en dat is gemiddeld vier per punt.
De hypothese stelt dat een grote verzameling willekeurig gevormde bollen een isostatisch krachtennetwerk kent, in de limiet waar de hardheid van de bollen oneindig groot wordt of de externe druk oneindig klein. Aangezien de details van de redenering achter de hypothese mij niet helemaal helder zijn, citeer ik hier een schets uit [5]

The reasoning goes as follows: under large enough pressure, sphere packings are hyperstatic, they have overconstrained subgraphs (oververbonden gebieden). *Any overconstrained subgraph must have self-stresses because of polydispersity* (willekeurige vormen). *Some bonds are then subject to tensile self-stress* (in deze context: onderlinge spanning die de bollen niet vervormd) *The negativity of a self-stress is not in contradiction with the requirement of compressive <u>total</u> stress if the aplied pressure is large, because the superposition of both contributions* (de krachtcomponent van de zelfspanning en die van de externe druk) *is still compressive. But when the stiffness-to-load ratio is increased, either by reducing the external pressure or increasing the stiffness, self-stresses become dominant (...) and therefore if any overconstrained subgraph existed, some of its bonds would have a tensile total stress, which is not allowed by assumption. Therefore, when the external pressure is lessened, overconstrained subgraphs must cease to exist.*

Het komt er op neer dat de oververbonden (hyperstatische) gebieden niet aanwezig zijn als de verhouding tussen de hardheid van de bollen en de externe druk naar oneindig gaat. Een 'oververbonden gebied' is tot nog toe een subgraaf met een gemiddeld coördinatiegetal groter dan vier. In paragraaf 3.3 zal dit preciezer gemaakt worden.

2.1 De Onderzoeksvraag van dit Project

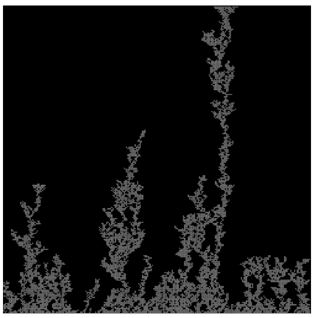
Onderzoeken of de isostatische hypothese ook in de topologische context kan worden toegepast is in dit project aan de orde. We hebben ons de vraag gesteld wat rigiditeitspercolatie is. Uit onderzoek blijkt er een rigide netwerk te percoleren op een rooster voor $p > p_c = 0.6602(3)$ (p is de kans dat twee buurpunten verbonden zijn). Er is dan een rigide netwerk aanwezig van oneindige grootte (je kunt er geen cirkel omheen trekken). Merk op dat dit netwerk altijd ingebed is in een contactnetwerk van eveneens oneindige grootte. De vraag is nu of het rigide netwerk isostatisch is voor $p \downarrow p_c$.
Het is mij niet gelukt de argumentatie van de isostatische hypothese direct te vertalen naar een topologische beschrijving. We kunnen ons voorstellen dat in de limiet van een oneindig groot rooster de fractie van het aantal oververbonden gebieden ten opzichte van het hele rigide netwerk nul wordt. Is dit het geval, dan kan gezocht worden naar een concrete interpretatie van de isostatische hypothese.
Met behulp van de computer heb ik gezocht naar het gemiddeld aantal verbindingen per punt uit het rigide netwerk dat percoleert op een rooster met $p = p_c$ (de drempelwaarde zoals gevonden uit literatuur, zie [2]). Indien dit gemiddelde coördinatiegetal niet daalt naar vier voor steeds grotere roosters kunnen we zeggen dat het percolerende, rigide netwerk op een oneindig groot rooster niet isostatisch is als $p \downarrow p_c$.

3 Numerieke Methode

Om het coördinatiegetal van het minimaal percolerende, rigide netwerk uit te rekenen heb ik een algoritme geschreven. Hierin wordt uitgegaan van een lijst met punten en een lijst verbindingen behorend bij de punten. Ik heb gekozen om de graaf te plotten (te 'realiseren') op een tweedimensionaal, triangulair rooster[1]. Eerst is hiervan de connectiviteit onderzocht. Het bleek het handigst om dit met een soort touw te doen. Vervolgens vond ik een algoritme op internet genaamd 'The Pebble Game'. Dit algoritme maakt een index van verbindingen die onafhankelijk zijn. Door het connectiviteitsalgoritme en The Pebble Game te combineren verkreeg ik een methode om te rekenen aan rigiditeitspercolatie.

3.1 Connectiviteit

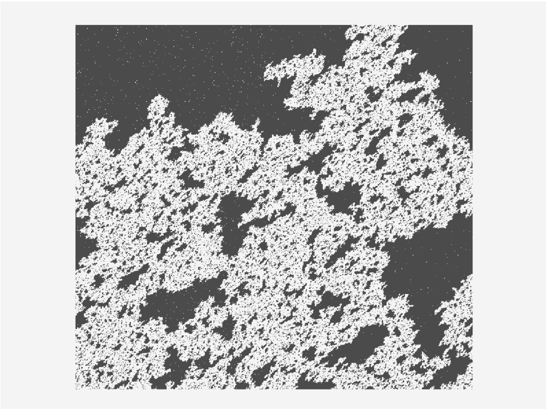
Na verschillende pogingen een effectief algoritme te vinden ben ik, op aanraden van prof. Nienhuis, aan de slag gegaan met een 'depth first search' om de connectiviteit van een graaf te onderzoeken. Dit in tegenstelling tot mijn eerste poging: de 'breadth first search' die steeds vanuit ieder punt uit het bestaande cluster een nieuw verbonden punt zoekt. Deze nieuwe punten worden dan weer toegevoegd aan het cluster en de 'search' begint opnieuw. Ik achtte het onbelangrijk dat de richting van percolatie willekeurig moest zijn en begon onderaan, met de hele bodem, om dan te zoeken naar punten daarboven. Als een cluster van onder tot boven verbonden was, noemde ik het rooster percolerend. Alhoewel dit met de intuïtie van percolatie overeenkomt (denk aan de koffie-percolator) bleek deze vorm van percolatie 'directed connectivity percolation' te heten en zich zelfs in een andere universaliteitsklasse te bevinden dan de 'undirected' variant.
Zo zag het eruit.



De 'depth first search' werkt anders. In plaats van de hele rand af te zoeken naar buren gaat deze zoekmethode alleen van buur naar buur. Ik zal hier omschrijven hoe.
Begin bij een willekeurig punt uit het rooster. Hier begint het 'touw'. Ga naar een naaste buur en neem het touw mee. Ga dan weer naar een naaste buur en doe hetzelfde, maar ga niet terug naar waar je vandaan kwam. Herhaal dit totdat het pad doodloopt en ga dan een stapje terug via het touw. Rol het

[1] de punten hebben geen algebraïsch onafhankelijke coördinaten, dus niet ieder plaatje klopte

touw zelf een stukje op, maar het punt waar het pad doodliep: het behoort tot het verbonden cluster. Ga nu weer verder via een andere buur totdat het pad wederom doodloopt. Ga weer een stapje terug, etc. Blijf dit herhalen onder de volgende voorwaarden: het touw mag zichzelf niet kruisen en je kunt niet over een gemarkeerd punt.
Uiteindelijk zullen alle punten uit het verbonden cluster gemarkeerd zijn, want als er een punt ongemarkeerd is, is het verbonden met een ander ongemarkeerd punt of verbonden met een punt waar het touw ligt. Nu zal het algoritme steeds een stapje terug doen via het touw totdat het op de plek komt waar het begon. Indien hier geen ongemarkeerde buren meer zijn stopt het algoritme.
Zo zag het eruit.



3.2 'The Pebble Game'

Het technisch iets ingewikkeldere Pebble Game algoritme vergt enige introductie. We zullen in deze paragraaf aantonen dat het algoritme, uitgaande van één 'vastzittende' verbinding het grootste rigide netwerk uit het rooster selecteert. Fundamenteel aan de methode is dat ieder roosterpunt in twee dimensies twee vrijheidsgraden heeft en dat iedere onafhankelijke verbinding een vrijheidsgraad beperkt. Onafhankelijkheid van de verbindingen is wat feitelijk onderzocht wordt.

In hoofdstuk 1.1 hebben we gezien dat $G = (V, E)$ 'generically rigid' is als er een realisatie is die aan het rigiditeitscriterium voldoet (We begrijpen E als een verzameling verbindingen, maar ook als een verzameling vergelijkingen.) Dit criterium hield in dat iedere flex triviaal moet zijn. We willen begrijpen dat het algoritme de flexibiliteit van G goed berekent.

Eerst bewijzen we 'Laman's theorem'. Laat $G = (V, E)$ de graaf zijn van de volledige lijst punten en vergelijkingen. Verder is n de orde van V en m de orde van E. Een flex moet voldoen aan m vergelijkingen. Als al deze vergelijkingen onafhankelijk zijn, dan zeggen we dat E onafhankelijk is. In dit geval is er voor iedere vergelijking minimaal één onbekende. De triviale of rigid body motions vormen in twee dimensies drie onbekenden. Deze kunnen niet verder worden beperkt door de vergelijkingen. De resterende onbekenden zijn de bewegingen van de punten uit V. En dus:

$$\text{E is een onafhankelijk systeem van vergelijkingen} \Rightarrow 2n \geq m + 3$$

Nu selecteren we een subgraaf $G' \subset G$ op de volgende manier. Neem $E' \subset E$ en laat V' daarbij de verzameling van punten die aan een verbinding uit E' zitten. Zo'n subgraaf noemen we de door E' geïnduceerde graaf. Als E onafhankelijk is, zullen ook alle $E' \subset E$ onafhankelijk zijn. Er is in dit geval dus geen $E' \subset E$ met $2n' < m' + 3$ waarbij n' de orde van V'. Oftewel:

$$\text{E is een onafhankelijk systeem van vergelijkingen} \Rightarrow \nexists E' \subset E : 2n' < m' + 3$$

Omgekeerd, laat E afhankelijk (oftewel niet onafhankelijk) zijn en neem $E' \subset E$ de kleinste afhankelijke deelverzameling. Dan is het aantal vergelijkingen in E' groter dan het aantal onbekenden min drie (De minimale dimensie van 'flex'). Dus er is een $E' \subset E$ met $2n' < m' + 3$. Tezamen met de vorige implicatie kunnen we nu Laman's theorem formuleren:

$$\text{E onafhankelijk systeem van vergelijkingen} \Leftrightarrow \nexists E' \subset E : 2n' < m' + 3$$

Stel dat G rigide is. Dan is iedere flex triviaal en $2n \leq m + 3$. Als E afhankelijk is, zagen we dat de strikte ongelijkheid moet gelden. Dus G rigide en $2n = m+3$ impliceert dat E onafhankelijk is. Andersom, als E onafhankelijk is en $2n = m + 3$ dan is het gemakkelijk in te zien dat er geen niet-triviale flex kan bestaan. In het geval $2n = m + 3$ vinden we de dubbele implicatie:

$$\text{G rigide } \Leftrightarrow \nexists E' \subset E : 2n' < m' + 3$$

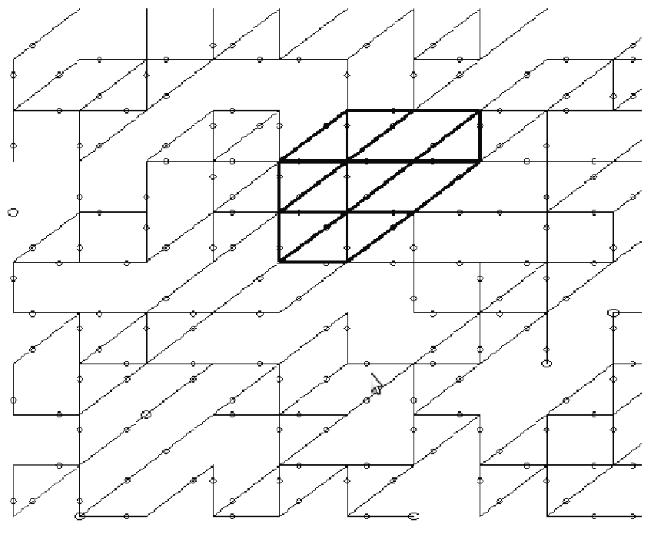
Het algoritme werkt nu zo: Ieder roosterpunt krijgt twee 'pebbles'. Deze staan voor de twee vrijheidsgraden, in het totaal zijn het er $2n$. Als er een verbinding tussen twee punten is, wordt er een pebble aan deze verbinding vastgezet. Dit staat voor het wegnemen van een onbekende door een vergelijking, waarvan er m zijn. Het maakt niet uit vanuit welk van de punten deze pebble komt, dus de pebbles kunnen later nog worden herschikt door een reeds vastgezette pebble vrij te maken en de pebble van het buurpunt aan de verbinding vast te zetten.

Stel we willen een pebble vastmaken aan een verbinding tussen de punten $\{i, j\} \in E$. Als er nu, doordat de pebbles van de punten p_i en p_j al vastzitten aan andere verbindingen geen pebble vrij is, dan kan de verbinding niet zomaar worden verankerd. Nu laten we het algoritme de pebbles uit de omgeving zo proberen te herschikken dat er minimaal vier pebbles vrijkomen aan de punten van de verbinding. (We zijn hier aan het zoeken in een 'directed graph', waarbij iedere verankerde pebble een richting voorsteld.)

Als het gelukt is om vier pebbles vrij te maken, stopt het zoeken en wordt er een pebble aan de verbinding verankerd. Lukt het niet dan is de omgeving waarin gezocht werd de subset $E' \subset E$ met $2n' < m' + 3$ en is de verbinding niet onafhankelijk ten opzichte van de omgeving. De pebble wordt dan niet verankerd en de subset geregistreerd als een 'oververbonden gebied'. Het connectiviteitsalgoritme verzekert dat de hele omgeving doorzocht wordt. 'De omgeving' is de directed subgraph waarin wordt gezocht naar de vierde pebble.

Als getracht is aan alle verbindingen uit E een pebble vast te maken, nemen we

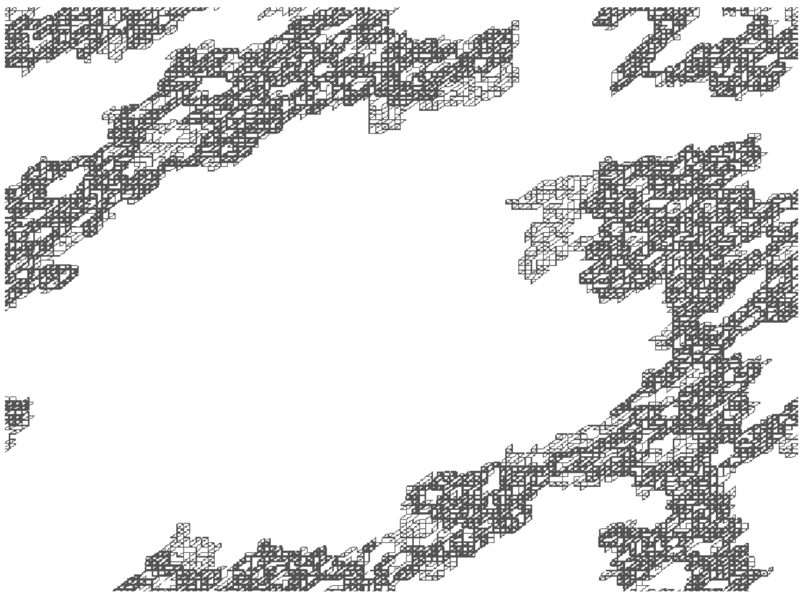
weer een willekeurige verbinding $e \in E$. We willen onderzoeken welke subgraaf $G_d \subset G$ rigide is ten opzichte van deze verbinding. Eerst zoeken we naar drie vrije pebbles voor e. De verbinding zelf is reeds verankerd of onafhankelijk, waardoor drie het maximum aantal vrije pebbles is. Het is ook het minimum, want er zijn voor iedere verbinding steeds drie vrijheidsgraden. Deze drie pebbles zetten we vast, maar niet aan een verbinding. Ze worden gewoon niet meer gezien als vrije pebbles.
Nu gaan we voor ieder buurpunt naar een vrije pebble zoeken. Dit heb ik gedaan met de 'breadth first search'. Als de vrije pebble niet gevonden kan worden is het punt onderdeel van het rigide netwerk G_d. Het punt wordt opgenomen in V_d en de verbinding die vanuit het punt vastzit aan het bestaande rigide netwerk wordt opgenomen in E_d. Omdat drie pebbles zijn vastgezet en aan iedere verbinding één pebble zit, is er in deze subgraaf geen $E' \subset E_d$ met $2n' < m' + 3$ en volgens Lamans Theorem is E_d dan een onafhankelijk systeem van vergelijkingen.
Verder geldt voor G_d dat $2n_d \leq m_d + 3$, want onafhankelijke verbindingen kunnen niet doorzocht worden. Samengenomen is G_d een subgraaf met $2n_d = m_d + 3$ en wegens de onafhankelijkheid van E_d is G_d dan rigide. Laat nu G_u de subgraaf van G zijn zodat $G_u = G_d + \{\text{de onafhankelijke verbindingen}\}$. Het moge duidelijk zijn dat G_u rigide is.
Laat tenslotte G_c het contactcluster zijn dat de punten $\{i, j\}$ bevat. Dan geldt $G_u \subset G_c$ en aangezien alle paden in G_c waarover pebbles gerangschikt kunnen worden onderzocht zijn door het algoritme is G_u de grootste subgraaf van G_c die rigide verbonden is met $\{i, j\}$.
Het algoritme zal dus slagen in zijn opzet.



Figuur 3: De rondjes zijn de pebbles en de dikkere lijnen stellen een 'oververbonden gebied' voor

4 Het Coördinatiegetal en de Torus

Het berekenen van het coördinatiegetal is nu een simpele opgave; het aantal verbindingen is $2n$ plus het aantal afhankelijke bonds en het gemiddeld coördinatiegetal is het aantal verbindingen maal twee gedeeld door het aantal punten.
Voor kleine tori is de rol van percolatie gering. Daarom onderzoeken we het coördinatiegetal bij toenemende rooster afmetingen. Als dit getal stabiliteit ontwikkeld na een bepaalde afmeting, mogen we extrapoleren naar grotere roosters.
We hebben het steeds gehad over 'het percolerende, rigide netwerk'. Daarmee bedoelde we het rigide netwerk wat oneindig groot was. Als er zo'n netwerk aanwezig was, dan 'percoleerde de rigiditeit op het rooster'. Merk op dat of het rigide netwerk oneindig veel punten bevatte of (hemelsbreed) oneindig groot was, geen verschil maakte. Op een computer kan echter geen oneindig groot rooster gesimuleerd worden en een netwerk op het eindige rooster kan heel compact zijn en dientengevolge meer punten bevatten dan een netwerk dat hemelsbreed groter is. We definiëren hier nu 'het best percolerende netwerk' als het netwerk dat hemelsbreed het grootst is. Hiervoor moet de graaf echter wel gerealiseerd worden, anders ontbreekt het afstandsbegrip. Ik heb gekozen voor een triangulair rooster, waarbij buurpunten op eenheidsafstand van elkaar staan.
We kunnen nu eenvoudigerwijs alleen de netwerken bekijken die aan twee tegenoverliggende kanten verdwijnen, maar vanwege de geforceerde randcondities die men dan moet opleggen heb ik gekozen voor een torus; het vierkante roosterveld is links-rechts en boven-onder aan elkaar verbonden. Een percolerend netwerk is een rigide netwerk dat hemelsbreed half zo lang is als de diagonaal van het roosterveld.



Figuur 4: Slechts één rigide netwerk

5 Resultaten en Conclusie

De numerieke resultaten zijn opgenomen in de volgende tabel. Als er geen percolerend netwerk aanwezig was op het rooster, dan werd het betreffende coördinatiegetal niet opgenomen in het gemiddelde. Het 'Aantal Tori' is echter het totaal aantal tori waarover gemeten is. Steeds was de kans p dat er tussen buurpunten een verbinding aanwezig was $p_c = 0.6602$, het kritieke punt uit de literatuur.

Straal Torus	Coördinatiegetal	Aantal Tori
10	4.1220(3)	300.000
20	4.0849(7)	30.000
30	4.082(2)	11.000
40	4.082(2)	7.000
50	4.082(2)	1.600

We zien dat het coördinatiegetal lijkt te convergeren naar $z = 4.082$
Helaas heb ik het algoritme niet op een andere manier kunnen testen dan door naar de plaatjes te kijken en vanuit de basisvormen na te gaan of de gevonden netwerken daadwerkelijk rigide waren. Wel heb ik eens een filmpje gemaakt van het algoritme in werking waardoor ik kon nagaan of de pebbles goed werden herschikt. Het zou nog beter zijn geweest om de drempelwaarde te voorspellen. Hiervoor had ik echter niet genoeg rekenkracht. Ook was het algoritme niet optimaal; in het artikel 'The Pebble Game' [2] wordt bijvoorbeeld gesproken over 'triangularisatie' van de oververbonden gebieden, waardoor de efficiëntie van het algoritme wordt verbeterd.
Het coördinatiegetal ligt dicht bij de isostatische waarde $z = 4$. Aangetoond is in ieder geval dat het niet convergeert naar een waarde ver boven vier. Dit geeft aan dat de isostatische hypothese een toch rol kan spelen in rigiditeitspercolatie. Er is met andere woorden geen nieuws onder de zon!
Interessant vond ik tot slot of het weghalen van een cruciale bond uit het minimale, oneindig grote, rigide netwerk leidt tot het ontstaan van twee, drie, eindig of oneindig veel rigide netwerken. Als het er oneindig veel zijn, zou dit een extreem niet-lokaal gedrag van rigiditeit impliceren, hetgeen de uitspraak 'het percolerende netwerk' niet ten goede komt. Het idee echter, dat het netwerk hyperstatisch is en dat dus het percolerende cluster altijd oververbonden is spreekt eerder voor het uiteenvallen van het originele netwerk in eindig veel netwerken. De slotopmerking uit een artikel [4] over de uniciteit van het rigide netwerk in percolatie theorie stipt het probleem van 'niet-lokaliteit' ook aan.

6 Slotwoord

Ik denk dat het percoleren van rigiditeit een lastig onderwerp is, maar heb met veel plezier en voldoening aan dit bachelorproject gewerkt. Waarom de blokken bij Kats zo geordend waren weet ik nog steeds niet, maar grappig was het wel dat het project me zelfs tot op mijn zeilvakantie bleef achtervolgen. Tenslotte wilde ik graag Sylvie Verdierre danken voor het geduldig luisteren naar mij als ik aan het praten was over dit interessante project, en Freek Spijkerman voor het verbeteren van de taalfouten en grammatica.
Berend-Willem Hietbrink, een taalfilosoof en vriend, zou hebben gezegd: *'interessant' komt van in-ter het zand. Men ondekte dat een strandwandeling gedachten opleverde die bruikbaar waren. Ook de uitdrukking 'kom terzake' behelst eigenlijk een uitnodiging tot een strandwandeling: 'kom ter zand ⇒ kom mee naar het strand' alwaar het gesprek een hoger niveau zou aannemen.*
Het zou heel leuk zijn als het (echte) onderzoek aan rigiditeitspercolatie ooit aan de hypostatische hypothese een topologische interpretatie kan geven. Als dit gebeurt zal ik Prof. Bernard Nienhuis hiervoor krediet willen geven.

11 sept. 2009, Wout Neutkens

Figuur 5: Op de boot naar Kats!

Referenties

[1] Whiteley, Walter; Rigidity and Scene Analysis; Handbook of discrete and computational geometry, 893–916; CRC Press Ser. Discrete Math. Appl.

[2] Jacobs, Donald J. Hendrickson, Bruce; An algorithm for two-dimensional rigidity percolation: The Pebble Game; J. Comput. Phys. 137 (1997), no. 2, 346–365.

[3] Grimmett, Geoffrey; Percolation; Springer-Verlag ISBN 0-387-96843-1; Scheikunde Bibliotheek UvA

[4] Olle Häggström and Johan Jonasson; Uniqueness and non-uniqueness in percolation theory; Probability Surveys Vol. 3 (2006) 289-344.

[5] Hinrichsen, H. Dietrich, E.W.;The Physics of Granular Media;Wiley-VCH ISBN 3-527-40373-6;Hoofdstuk 2 door C.F. Moukarzel, paragraaf 2.2.3 'Isostatisticy in the Limit of Large Stiffness to Load Ratio'.